Eine leichte Methode, das Integral $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p}-2x^n\cos\zeta+x^{n-p}}{x^{2n}-2x^n\cos\theta+1}$ im Fall zu finden, in welchem nach der Integration entweder $x=1$ oder $x=\infty$ gesetzt wird*

Leonhard Euler

§1 S bezeichne das Integral dieser Formel so genommen, dass der Wert von S in dem Fall genommen werden muss, in welchem $x=1$ gesetzt wird; hier bemerke ich zuerst, dass die vorgelegte Form um vieles gefälliger wird, wenn der Zähler und Nenner durch x^n geteilt werden; denn dann werden wir

$$S = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2\cos\zeta + x^{-p}}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

haben. Hier ist freilich sofort klar, dass der Nenner $x^n - 2\cos\theta + x^{-n}$ immer in n Faktoren aufgelöst werden kann, welche jeweils von der Form $x^2 - 2\cos\omega + x^{-1}$ sind, wo der Winkel ω so genommen werden muss, dass, während der Ausdruck verschwindet, zugleich auch der Nenner selbst verschwindet.

§2 Nachdem dieser Faktor $x^1 - 2\cos\omega + x^{-1}$ aber $=0$ gesetzt worden ist, woher

*Originaltitel: "Methodus facilis inveniendi integrali huius formulae $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p}-2x^n\cos\zeta+x^{n-p}}{x^{2n}-2x^n\cos\theta+1}$ casu quo post integrationem ponitur vel $x=1$ vel $x=\infty$", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 3* (1788, geschrieben 1776): pp. 3–24, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 265 – 290, Eneström Nummer E620, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$x = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$$

wird, berechnet man daraus im Allgemeinen

$$x^{\lambda} = \cos\lambda\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\lambda\omega \quad \text{und} \quad x^{-\lambda} = \cos\omega - \sqrt{-1}\cdot\sin\lambda\omega.$$

Daher wird der Nenner also diesen Wert $2\cos n\omega - 2\cos\theta$ annehmen, welcher also verschwinden wird, wenn für $n\omega$ einer aus diesen Werten genommen wird:

$$\theta, \quad \theta+2\pi, \quad \theta+4\pi, \quad \theta+6\pi, \quad \theta+8\pi \quad \text{etc.};$$

daher, weil die Anzahl dieser Werte $= n$ sein muss, werden alle Werte des Winkels ω die folgenden sein

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta+2\pi}{n}, \quad \frac{\theta+4\pi}{n}, \quad \frac{\theta+6\pi}{n}, \quad \ldots \quad \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}.$$

Weil aber außerdem $\cos n\omega = \cos\theta$ ist, wird auch $\sin n\omega = \sin\theta$ sein.

§3 Weil also der Nenner n Faktoren von dieser Form hat

$$x^1 - 2\cos\omega + x^{-1},$$

wird unser Bruch, wie auch immer sein Zähler aussah, in n einfache Brüche aufgelöst werden können, deren Nenner jene n Faktoren des Nenners sein werden. Wir wollen also der Kürze wegen Π anstelle des Zählers $x^p - 2\cos\zeta + x^{-p}$ schreiben und dieser Bruch

$$\frac{\Pi}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

wird in n einfache Brüche aufgelöst werden, deren einzelne diese Form haben werden

$$\frac{P}{x^1 - 2\cos\omega + x^{-1}};$$

deshalb wollen wir

$$\frac{\Pi}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}} = \frac{P}{x^1 - 2\cos\omega + x^{-1}} + R$$

setzen, wo der Buchstabe R alle übrigen Brüche umfasst, woher wir sofort

$$\frac{\Pi(x^1 - 2\cos\omega + x^{-1})}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}} = P + R(x^1 - 2\cos\omega + x^{-1})$$

haben werden. Wenn wir also $x^2 - 2\cos\omega + x^{-1} = 0$ setzen, werden wir daraus den Zähler P berechnen; es wird nämlich

$$P = \frac{\Pi(x^1 - 2\cos\omega + x^{-1})}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

sein, wenn freilich in dieser Gleichung $x = \cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega$ gesetzt wird.

§4 Aber wir haben ja schon gesehen, wenn wir x diesen Wert zuteilen, dass so der Zähler wie der Nenner dieses Bruchs verschwindet, weswegen wir gemäß der allbekannten Regel anstelle des Zählers und des Nenners ihre Differentiale schreiben wollen und es wird

$$P = \frac{\Pi(x^1 - x^{-1})}{nx^n - nx^{-n}}$$

hervorgehen. Wenn nun also anstelle von x der angegebene Wert geschrieben wird, werden wir für Π zuerst diesen Wert erhalten

$$\Pi = 2\cos p\omega - 2\cos\zeta;$$

aus dem Bruch entspringt aber dieser Wert $\frac{\sin\omega}{n\sin n\omega}$; weil dieser Ausdruck also reell ist, wird der gesuchte Zähler

$$P = \frac{2\sin\omega(\cos p\omega - \cos\zeta)}{n\sin n\omega}$$

sein. Nun haben wir aber gesehen, dass $\sin n\omega = \sin\theta$ ist, woher dieser Zähler

$$P = \frac{2\sin\omega(\cos p\omega - \cos\zeta)}{n\sin\theta}$$

sein wird.

§5 Jeder beliebige aus der Auflösung des vorgelegten Bruches zu entspringende Partialbruch wird also von dieser Art

$$\frac{2(\cos p\omega - \cos\zeta)}{n\sin\theta}\cdot\frac{\sin\omega}{x^1 - 2\cos\omega + x^{-1}}$$

sein; wenn in dieser Form dem Winkel ω nacheinander alle oben angegebenen Werte zugeteilt werden, welche

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta+2\pi}{n}, \quad \frac{\theta+4\pi}{n}, \quad \dots \quad \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$$

waren, werden alle Partialbrüche entstehen, die zu einer Summe gesammelt die vorgelegte Form $\frac{x^p-2\cos\zeta+x^{-p}}{x^n-2\cos\theta+x^{-n}}$ selbst ergeben müssen, woher auch diese Integrale mit $\frac{\partial x}{x}$ multipliziert und integriert, dann aber zu einer Summe gesammelt, das gesuchte Integral S darbieten.

§6 Wir wollen also den Bruch

$$\frac{\sin\omega}{x^1-2\cos\omega+x^{-1}}$$

betrachten, welcher mit $\frac{\partial x}{x}$ multipliziert

$$\frac{\partial x\sin\omega}{x^2-2x\cos\omega+1}$$

liefert, dessen Integral so genommen, dass es für $x=0$ verschwindet, bekannt ist

$$=\arctan\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}$$

zu sein. Daher entspringt also aus diesem Partialbruch dieser Anteil des Integrals

$$\frac{2(\cos p\omega-\cos\zeta)}{n\sin\theta}\cdot\arctan\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega},$$

woher also leicht alle n Teile des gesuchten Integrals abgeleitet werden, wenn anstelle von ω der Reihe nach all seine angegebenen Werte eingesetzt und zu einer Summe gesammelt werden.

§7 Weil wir ja aber an dieser Stelle nur den Wert des Integrals verlangen, der für $x=1$ entspringt, wird in diesen Fall

$$\arctan\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}=\arctan\frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$$

werden. Aber diese Formel $\frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$ drückt den Kotangens des Winkels $\frac{1}{2}\omega$ aus und daher den Tangens des Winkels $\frac{\pi-\omega}{2}$, sodass in diesem Fall der Anteil des Integrals

$$\frac{\cos p\omega - \cos\zeta}{n\sin\theta}(\pi-\omega)$$

sein wird. Hier wird es aber hilfreich sein, nebenbei bemerkt zu haben, wenn das Integral für den Fall $x=\infty$ verlangt wird, dass dann

$$\arctan -\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$$

hervorgehen wird; weil also $-\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$ der Tangens des Winkels $\pi-\omega$ ist, weil wir zuvor $\frac{\pi-\omega}{2}$ gehabt hatten, ist daher klar, dass im Fall $x=\infty$ auch das ganze Integral doppelt so groß sein wird wie im Fall $x=1$.

§8 Wir wollen also dem Winkel ω nacheinander all seine Werte zuteilen und sie der Reihe nach hier aufschreiben und es wird

$$\begin{aligned} S = & \frac{\cos\frac{p\theta}{n} - \cos\zeta}{n\sin\theta}\cdot\frac{n\pi-\theta}{n} \\ + & \frac{\cos\frac{p}{n}(\theta+2\pi) - \cos\zeta}{n\sin\theta}\cdot\frac{(n-2)\pi-\theta}{n} \\ + & \frac{\cos\frac{p}{n}(\theta+4\pi) - \cos\zeta}{n\sin\theta}\cdot\frac{(n-4)\pi-\theta}{n} \\ + & \frac{\cos\frac{p}{n}(\theta+6\pi) - \cos\zeta}{n\sin\theta}\cdot\frac{(n-6)\pi-\theta}{n} \\ & +\text{etc.,} \end{aligned}$$

die Anzahl welcher Formeln $= n$ sein muss. Aber dieser Ausdruck werde sofort in zwei auf diese Weise anzuzeigende Teile aufgespalten

$$S = \frac{Q}{n\sin\theta} - \frac{R\cos\zeta}{n\sin\theta},$$

sodass

$$Q = \frac{n\pi - \theta}{n} \cos \frac{p\theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} \cos \frac{p}{n}(\theta + 2\pi)$$
$$+ \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} \cos \frac{p}{n}(\theta + 4\pi) + \text{etc.}.$$
$$R = \frac{n\pi - \theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-6)\pi - \theta}{n} + \text{etc.}$$

ist, sodass uns noch die Aufgabe vorliegt, die Werte der Buchstaben Q und R zu erforschen.

§9 Zuerst ist aber sofort klar, dass der Wert von R eine arithmetische Progression, schrumpfend mit der Differenz $\frac{2\pi}{n}$, ist, woher die Summe von n Termen $= \pi - \theta$ sein wird, sodass $R = \pi - \theta$ ist. Aber das Finden der Progression Q bedarf einer umfassenderen Vorbereitung, für welches Ziel wir die folgenden allgemeinen Untersuchungen vorausschicken wollen.

§10 Man betrachte nun zuerst diese Progression der Kosinus, deren Winkel in einer arithmetischen Progression fortschreiten und deren Anzahl n sei,

$$t = \cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + 4\beta) + \cos(\alpha + 6\beta) + \cdots + \cos(\alpha + 2n\beta).$$

Nun wollen wir auf beiden Seiten mit $2 \sin \beta$ multiplizieren, und weil

$$2 \sin \beta \cos \gamma = \sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma - \beta)$$

ist, wird die folgende Form hervorgehen

$$2t \sin \beta = -\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 3\beta) + \sin(\alpha + 5\beta) + \cdots + \sin(\alpha + (2n+1)\beta)$$
$$- \sin(\alpha + 3\beta) - \sin(\alpha + 5\beta) - \cdots,$$

wo alle mittleren Terme sich offensichtlich gegenseitig aufheben, sodass allein die äußersten zurückbleiben, und daher wird also

$$t = \frac{\sin(\alpha + (2n+1)\beta - \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$$

sein.

§11 Weiter führe man dieselben Kosinus mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$, n zusammen und setze

$$u = 1\cos(\alpha+2\beta) + 2\cos(\alpha+4\beta) + 3\cos(\alpha+6\beta) + \cdots + n\cos(\alpha+2n\beta),$$

nach Verwenden welches mit $2\sin\beta$ multiplizierten und mit der zuvor gebrauchen Auflösung vereinfachten Ausdrucks wir

$$\begin{aligned} 2u\sin\beta = -\sin(\alpha+\beta) + \ &\sin(\alpha+3\beta) + 2\sin(\alpha+5\beta) \ + \cdots + n\sin(\alpha+(2n+1)\beta) \\ &- 2\sin(\alpha+3\beta) - 3\sin(\alpha+5\beta) - \cdots, \end{aligned}$$

erlangen werden, welche Form auf diese zurückgeführt wird

$$\begin{aligned} &n\sin(\alpha+(2n+1)\beta) - 2u\sin\beta \\ &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+3\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(2n-1)\beta), \end{aligned}$$

welche man v nenne.

§12 Nun multipliziere man diese Reihe erneut mit $2\sin\beta$, und weil im Allgemeinen

$$2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\gamma-\beta) - \cos(\gamma+\beta)$$

ist, werden wir

$$\begin{aligned} 2v\sin\beta = \cos\alpha \ &- \cos(\alpha+2\beta) - \cos(\alpha+4\beta) - \cdots - \cos(\alpha+2n\beta) \\ &+ \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+4\beta) + \cdots \end{aligned}$$

erlangen, woher wegen der sich gegenseitig aufhebenden Mittelterme

$$v = \frac{\cos\alpha - \cos(\alpha+2n\beta)}{2\sin\beta}$$

berechnet wird; weil daher

$$u = \frac{n\sin(\alpha+(2n+1)\beta) - v}{2\sin\beta}$$

ist, erhalten wir daraus

$$u = \frac{n\sin(\alpha + (2n+1)\beta)}{2\sin\beta} - \frac{\cos\alpha - \cos(\alpha + 2n\beta)}{4(\sin\beta)^2}.$$

§13 Wir wollen nun die beiden gerade angegebenen Summationen allgemein verbinden und wollen

$$V = (a+b)\cos(\alpha+2\beta) + (a+2b)\cos(\alpha+4\beta) + (a+3b)\cos(\alpha+6\beta)$$
$$+ \cdots + (a+nb)\cos(\alpha+2n\beta)$$

setzen und es ist ersichtlich, dass $V = at + bu$ sein wird, woher, nachdem anstelle von t und u die entsprechenden Werte eingesetzt worden sind,

$$V = \frac{a\sin(\alpha + (2n+1)\beta) - a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta} + \frac{bn\sin(\alpha + (2n+1)\beta)}{2\sin\beta}$$
$$- \frac{b\cos\alpha - b\cos(\alpha+2n\beta)}{4(\sin\beta)^2}$$

sein wird.

§14 Nun ist es hinreichend ersichtlich, dass die Progression, die wir oben mit dem Buchstaben Q dargeboten haben, in dieser allgemeinen für V gefundenen Formel enthalten ist, weil ja in beiden dieselben Anzahl von n Termen auftritt und die Koeffizienten der Kosinus der Reihe Q auch eine arithmetische Progression bilden. Deswegen wollen wir für die Koeffizienten

$$a + b = \frac{n\pi - \theta}{n} \quad \text{und} \quad a + 2b = \frac{(n-2)\pi - \theta}{n}$$

setzen, woher wir

$$b = -\frac{2\pi}{n} \quad \text{und} \quad a = \frac{(n+2)\pi - \theta}{n}$$

ableiten. Nun wollen wir auch die Winkel einander angleichen und wollen

$$\alpha + 2\beta = \frac{p\theta}{n} \quad \text{und} \quad \alpha + 4\beta = \frac{p}{n}(\theta + 2\pi)$$

setzen, woher wir

$$\beta = \frac{\pi p}{n} \quad \text{und daher weiter} \quad \alpha = \frac{p}{n}(\theta - 2\pi) = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta)$$

berechnen, und auf diese Weise wird

$$V = Q$$

werden. Aber die im Ausdruck von V auftretenden Winkel werden zuerst

$$\alpha + (2n+1)\beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta) + 2\pi p$$

sein, wo, weil p eine ganze Zahl ist, der letzte den ganzen Umfang $2\pi p$ ausdrückende Teil weggelassen worden ist, woher wir

$$\sin(\alpha + (2n+1)\beta) = -\sin\frac{p}{n}(\pi - p)$$

haben werden. Weiter taucht der Winkel

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta)$$

auf, dessen Sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = -\sin\frac{p}{n}(\pi - \theta)$$

ist. Schließlich wird

$$\alpha + 2n\beta = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta) + 2\pi p$$

und

$$\cos(\alpha + 2n\beta) = \cos\frac{p}{n}(2\pi - \theta)$$

sein. Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird

$$Q = V = -\frac{\frac{(n+2)\pi - \theta}{n}\sin\frac{p}{n}(\pi - \theta) - \frac{(n+2)\pi - \theta}{n}\sin\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2\sin\frac{\pi p}{n}}$$

$$+\frac{2\pi\sin\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2\sin\frac{\pi p}{n}} + \frac{\frac{2\pi}{n}\cos\frac{p}{n}(2\pi - \theta) - \frac{2\pi}{n}\cos\frac{p}{n}(2\pi - p)}{4\left(\sin\frac{\pi p}{n}\right)^2}$$

hervorgehen, welcher Ausdruck natürlich auf diesen zurückgeführt wird

$$Q = V = \frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{\sin \frac{\pi p}{n}}.$$

§15 Nachdem also die Werte der Buchstaben Q und R gefunden worden sind, wird der Wert des Integrals, den wir suchen, für den Fall $x = 1$

$$S = \frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin \theta \sin \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta) \cos \zeta}{n \sin \theta}$$

sein. Wenn aber das Integral von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = \infty$ gesucht wird, wird sein Wert doppelt so groß werden.

§16 Nachdem diese Dinge nun im Allgemeinen ausgeführt worden sind, wollen wir einen schon öfter behandelten Fall betrachten, in welchem $\zeta = 90^\circ$ und $\theta = 90^\circ$ ist und diese zu integrierende Formel vorgelegt wird

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}},$$

und für seinen Wert im Fall $x = 1$ werden wir

$$S = \frac{\pi \sin \frac{p\pi}{2n}}{n \sin \frac{p\pi}{n}}$$

haben, welche wegen $\sin \frac{p\pi}{n} = 2 \sin \frac{p\pi}{2n} \cos \frac{p\pi}{2n}$ in jene allbekannte Formel

$$\frac{\pi}{2n \cos \frac{p\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n} \sec \frac{p\pi}{2n}$$

übergeht. Wenn wir aber nur $\zeta = 90^\circ$ nehmen, dass die zu integrierende Formel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

ist, wird ihr Wert von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt

$$\frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin \theta \sin \frac{p\pi}{n}}$$

sein, welcher Ausdruck auf diesen zurückgeführt wird

$$\frac{\pi}{n\sin\theta}\left(\cos\frac{p\theta}{n}-\sin\frac{p\theta}{n}\cot\frac{p\pi}{n}\right).$$

Bemerkungen zur angegebenen Integration

I. Zuerst bemerke ich hier, dass der im Zähler dargebotene mittlere Term die Integration in keiner Weise stört, weil ja, wenn er allein vorhanden wäre, die Integration keine Schwierigkeit bereiten würde; dann wird nämlich die Formel

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1}{x^n-2\cos\theta+x^{-n}}$$

auf diese Form zurückgeführt

$$\int\frac{x^{n-1}\partial x}{x^{2n}-2x^n\cos\theta+1},$$

welche für $x^n=y$ in diese übergeht

$$\frac{1}{n}\int\frac{\partial y}{y^2-2y\cos\theta+1},$$

deren Integral

$$\frac{1}{n\sin\theta}\arctan\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$$

ist, deren Wert im Fall $x=1$

$$\frac{1}{n\sin\theta}\arctan\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\pi-\theta}{2n\sin\theta}$$

wird, welcher mit $-2\cos\zeta$ multipliziert jenen daraus zu entspringenden Anteil in der oben gefundenen Form liefert, weswegen es überflüssig wäre, diesen Term in der Rechnung zu behalten; daher werden wir diese Integralformel betrachten

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^p+x^{-p}}{x^n-2\cos\theta+x^{-n}}$$

betrachten, deren Wert wir im Fall $x=1$ als

$$= \frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin \theta \sin \frac{p\pi}{n}}$$

gefunden haben, welchen wir der Kürze wegen mit dem Buchstaben P bezeichnen wollen, sodass

$$P = \frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin \theta \sin \frac{p\pi}{n}}$$

ist. Dann haben wir aber auch gefunden, dass im Fall $x = \infty$ der Wert dieser Formel $= 2P$ sein wird.

II. An zweiter Stelle muss sorgsam bemerkt werden, dass der Exponent p notwendig kleiner sein muss als der Exponent n, weil andernfalls der Bruch kein echter wäre und die Variable x im Zähler so viele oder mehr Dimensionen als im Nenner aufwiese. Sooft dies aber passiert, muss dem Integral außer den Teilen, welche wir über die Auflösung in Partialbrüche erlangt haben, eine gewisse ganze Größe hinzugefügt werden, was in unserer Lösung nicht gemacht worden ist, weswegen es ratsam ist, solche Fälle davon vollkommen auszunehmen. Im Übrigen wird es in jedwedem Fall leicht sein, diese ganzen Anteile zu den Teilen hinzuzufügen, welche uns unsere Methode an die Hand geben wird.

III. Aus der Lösung, welche wir gegeben haben, ist es ersichtlich, dass der Exponent p notwendig ganzzahlig festgelegt werden muss, weil ansonsten die dort dargebotenen Operationen nicht Geltung haben könnten; daher wird es umso wundersamer scheinen, dass die gefundenen Schlussfolgerungen bestehen bleiben können, auch wenn dieser Exponent p irgendeine gebrochene Zahl war, solange sie nur kleiner als n ist, weil sich diese Fälle immer auf ganzzahlige Exponenten zurückführen lassen. Um das zu zeigen, wollen wir festlegen, dass $p = \frac{q}{\lambda}$ ist und unsere Form wir für $x = z^\lambda$ gesetzt auf diese Form reduziert werden

$$\lambda \int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^q + z^{-q}}{z^{\lambda n} - 2\cos\theta + z^{-\lambda n}};$$

weil hier alle Exponenten ganze Zahlen sind und für die Integrationsgrenzen, welche $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ waren, auch $z = 0$, $z = 1$ und $z = \infty$ wird, wird der Wert des Integrals für $z = 1$

$$\frac{\lambda\pi \sin \frac{q}{\lambda n}(\pi - \theta)}{\lambda n \sin\theta \sin \frac{q\pi}{\lambda n}}$$

sein, welcher, nachdem anstelle von $\frac{q}{\lambda}$ wieder der Wert p eingesetzt worden ist, in diesen übergeht

$$\frac{\pi \sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin\theta \sin \frac{p\pi}{n}},$$

welcher Ausdruck mit dem obigen vollkommen übereinstimmt. Und daher sieht man ein, auch wenn dem Exponenten p irrationale Werte zugeteilt werden, solange sie nur den Exponenten n nicht übersteigen, dass dieser immer Geltung haben wird.

IV. Hier entspringt nun die Frage von größter Bedeutung, ob der Exponent p auch negative Werte zulässt oder nicht. Dies scheint aber zu bestätigen zu sein, weil ja imaginäre Größen gewiss nicht größer sind als n; daher schließen wir, solange der Wert von p so imaginär genommen wird, dass die Differentialform selbst reell bleibt, dass dann auch unsere Schlussfolgerungen mit der Wahrheit verträglich bleiben werden. Dies passiert aber, wenn wir $p = q\sqrt{-1}$ setzen; denn dann, weil im Allgemeinen

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos\varphi$$

ist, da ja in unserem Fall $\varphi = q\log x$ ist, wird die Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2\cos q\log x}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

sein. Nun wollen wir also sehen, welche Form unser Integral im Fall $x = 1$ annehmen wird, und weil ja der Sinus von imaginären Winkeln auch imaginär ist, weil ja

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{-1}}\sin\varphi$$

gilt, wollen wir $\psi\sqrt{-1}$ anstelle von φ schreiben und es wird

$$\sin\psi\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^{-\psi} - e^{+\psi})$$

sein, woher in der Integralform $\frac{p}{n} = \frac{q\sqrt{-1}}{n}$ sein wird, und daher wollen wir $\frac{q}{n}(\pi - \theta)$ anstelle von ψ für den Zähler schreiben, aber $\frac{q\pi}{n}$ für den Nenner, woraus der Wert des Integrals von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt

$$\frac{\pi}{n \sin\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$$

sein wird. Daraus wollen wir also das folgenden höchst bemerkenswerte Theorem formulieren.

Theorem

Wenn diese Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2\cos q \log x}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt wird, wird ihr Wert immer

$$= \frac{\pi}{2n \sin\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$$

sein. Wenn aber das Integral von $x = 0$ bis $x = \infty$ erstreckt wird, wird ein doppelt so großer Wert hervorgehen.

Dieser Lehrsatz verdient umso größere Aufmerksamkeit, weil kein Weg offensteht, seine Gültigkeit direkt zu beweisen.

V. Wir wollen aber zur als erstes dargestellten Integralformel zurückkehren, und weil ja der Zähler aus den zwei Teilen x^p und x^{-p} besteht, woher die Summe der Integrale für $x = 1$ als $= P$ gefunden worden ist, aber für den Fall $x = \infty$ doppelt so groß, $= 2P$, tritt hier das bemerkenswerte Phänomen auf, dass für die Grenze $x = \infty$ jeder der beiden Teile des Zählers denselben Wert $= P$ ergibt. Denn, wenn man das Integral von $x = 0$ bis $x = \infty$ erstreckt, wird immer

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}} = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{-p}}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}} = P$$

sein. Um dies zu zeigen, wollen wir für die zweite Formel $x = \frac{1}{z}$ setzen und sie wird diese Form annehmen

$$-\int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^{+p}}{z^{-n} - 2\cos\theta + z^{n}};$$

weil diese der ersten Formel vollkommen gleich ist, einzig das Vorzeichen $-$ ausgenommen, wird sein Wert von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = \infty$ negativ genommen der ersten Formel gleich sein. Weil aber $z = \frac{1}{x}$ ist, werden diese Integralgrenzen von $x = \infty$ bis hin zu $x = 0$ sein; wenn sie also vertauscht werden, wird auch das Vorzeichen des Integrals zu vertauschen sein und so der ersten Formel gleich werden; daher, weil die beiden Formeln zusammen einen Wert $= 2P$ haben, wird der Wert von beiden jeweils $= P$ sein, woher man das folgende gleichermaßen bemerkenswerte Theorem ableitet.

THEOREM

Der Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{\pm p}}{x^{n} - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = \infty$ erstreckt ist immer

$$= P = \frac{\pi \sin\frac{p}{n}(\pi - \theta)}{n \sin\theta \sin\frac{p\pi}{n}}.$$

Es ist aber ersichtlich, dass diese Gleichheit für den Fall $x = 1$ keinesfalls Geltung haben kann.

VI. Weil ja in unserer Differentialformel nur der Term $2\cos\theta$ auftritt, dessen Wert derselbe bleibt, auch wenn wir $\theta \pm 2i\pi$ statt θ nehmen würden, muss es hier höchst merkwürdig erscheinen, dass der Wert des Integrals dann ganz anderes hervorgehen wird, nämlich

$$= \frac{\pi \sin\frac{p}{n}(\pi - \theta \pm 2i\pi)}{n \sin\theta \sin\frac{p\pi}{n}},$$

woher mit Recht gefragt wird, welcher dieser Werte mit der Wahrheit konform ist; darauf kann nichts anderes geantwortet werden als das, dass alle Werte gleichermaßen wahrheitskonform anzusehen sind, was umso weniger wundersam erscheinen muss, weil alle Integralformeln von dieser Art in Wahrheit multiforme, sogar infinitiforme, Funktionen sind, was aus diesem sehr einfachen Beispiel $\int \frac{\partial x}{1+xx}$ eingesehen werden kann. Weil nämlich sein Integral den Kreisbogen darbietet, dessen Tangens x ist, aber dennoch unzählige Bogen gegeben sind, deren Tangens derselbe $= x$ ist, ist es notwendig, dass alle gleichermaßen in dieser Integralformel enthalten sind. Ja auch in unserem gefundenen Wert P lässt sich anstelle von π auch $\pi + 2i\pi$ schreiben und sein Wert wird nichtsdestoweniger mit der Wahrheit verträglich sein. Aber bei Integrationen von dieser Art pflegen immer die kleinsten Werte verlangt zu werden und auf diese Weise ist jede Schwierigkeit beseitigt worden.

VII. Weiter haben wir in der oben verwendeten Analysis angenommen, dass alle Faktoren des Nenners einander ungleich sind, was natürlich immer passiert, wenn nicht gerade $\cos\theta = \pm 1$ ist, in welchen Fällen der Nenner freilich ein Quadrat beinhaltet; er wird nämlich

$$= x^{-n}(x^n \pm 1)^2,$$

woher klar ist, dass alle Faktoren $x^n \pm 1$ zweimal auftauchen müssen. Dieser Umstand wird von unserer Formel P selbst verursacht, welche im Fall $\theta = 0$ einen unendlichen Wert anzeigt. Aber für $\theta = \pi$ zeigt sich ein außergewöhnliches Phänomen, während so der Zähler wie der Nenner der für P gefundenen Formeln verschwinden und daher der Bruch einen bestimmten Wert erhält. Wir wollen nämlich $\theta = \pi - \omega$ setzen, während ω unendlich klein ist, und es wird $\sin\theta = \sin\omega = \omega$ sein; aber wegen $\pi - \theta = \omega$ werden wir im Zähler $\sin\frac{p\omega}{n} = \frac{p\omega}{n}$ haben, woher der Wert von P als $\frac{\pi p}{nn \sin\frac{p\pi}{n}}$ resultiert, weil dieser vollkommen bestimmt ist, kann kein Zweifel bestehen bleiben, dass er richtig ist, woher das folgenden bemerkenswerte Theorem hervorgeht.

THEOREM

Wenn nach Vorlage der Differentialform

$$\frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 + x^{-n}} = \frac{x^{n-1}\partial x(x^p + x^{-p})}{(x^n + 1)^2}$$

ihr Integral von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wird, wird ihr Wert immer

$$= \frac{\pi p}{nn \sin \frac{p\pi}{n}}$$

sein; wenn sie aber bis hin zur Grenze $x = \infty$ erstreckt wird, wird ihr Wert doppelt so groß sein, also

$$= \frac{2\pi p}{nn \sin \frac{p\pi}{n}}.$$

Ein direkter Beweis dieses Lehrsatzes

Diese Integralformel werde auf die folgende Weise aufgelöst

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1+x^n)^2} = \frac{Q}{1+x^n} + \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{R}{1+x^n}.$$

Man nehme also die Differentiale nun multipliziere zugleich mit $\frac{x}{\partial x}$ und nach Setzen von $\partial Q = Q' \partial x$ wird diese Gleichung entspringen

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1+x^n)^2} = \frac{Q'x}{1+x^n} - \frac{nQx^n}{(1+x^n)^2} + \frac{R}{1+x^n},$$

welche mit $1 + x^n$ multipliziert auf diese Weise dargestellt werde

$$\frac{x^p + x^{n-p} + nQx^n}{1+x^2} = Q'x + R,$$

wo nun Q so genommen werden muss, dass jener Bruch ganz gemacht wird. Leicht wird aber klar, dass dies durch Setzen von

$$nQ = -x^p + x^{n-p}$$

passiert; denn dann wird jener Bruch

$$\frac{x^{n-p} + x^{2n-p}}{1+x^n} = x^{n-p}$$

werden, sodass wir nun

$$x^{n-p} = Q'x + R$$

haben. Weil also $Q = \frac{x^{n-p} - x^p}{n}$ ist, wird

$$Q'x = \frac{(n-p)x^{n-p} - px^p}{n}$$

sein und man berechnet daraus

$$R = \frac{p}{n}(x^{n-p} + x^p),$$

weshalb die vorgelegte Integralformel auf diese Form zurückgeführt worden ist

$$\frac{x^{n-p} - x^p}{n(1+x^n)} + \frac{p}{n}\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n-p} + x^p}{1+x^n},$$

welches Integral so zu nehmen ist, dass es für $x = 0$ verschwindet. Nun wollen wir also $x = 1$ setzen und der erste absolute Teil verschwindet, aber der Wert der Integralformel geht durch das, was schon vor langer Zeit gefunden worden ist, als

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{\pi}{n \sin \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi p}{nn \sin \frac{p\pi}{n}}$$

hervor, welcher also mit dem zuvor gefundenen vollkommen übereinstimmt.

VIII. Nun teile man in dieser letzten Form dem Exponenten p sogar einen imaginären Wert zu, indem man $p = q\sqrt{-1}$ setzt, und weil, wie wir zuvor gesehen haben, daher $x^p + x^{-p} = 2\cos q \ln x$ wird, wird die vorgelegte Integralformel

$$= 2\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^n \cos q \log x}{(1+x^n)^2}$$

sein. Für ihren Wert haben wir aber schon zuvor sehen, dass

$$\sin \frac{\pi q\sqrt{-1}}{n} = \frac{e^{-\frac{\pi q}{n}} - e^{+\frac{\pi q}{n}}}{2\sqrt{-1}}$$

sein wird, weswegen der Wert unserer Formel von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt

$$\frac{2\pi q}{nn\left(e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{-\frac{\pi q}{n}}\right)}$$

sein wird, woher wir das folgende der ganzen Aufmerksamkeit würdige Theorem ableiten.

THEOREM

Wenn der Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x \cos q \ln x}{(1+x^n)^2}$$

von der Grenze $x = 0$ *bis hin zu* $x = 1$ *erstreckt wird, wird er immer dieser Formel gleich werden*

$$\frac{\pi q}{nn\left(e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{-\frac{\pi q}{n}}\right)}.$$

Ein Beweis für dieses Theorem scheint aus den schon bekannten Prinzipien kaum gefunden werden zu können.

IX. Außerdem ist es auch ersichtlich, dass die Methode, die wir benutzt haben, um unsere Formel zu integrieren, keinen Bestand haben kann, wenn der mittlere Term des Nenners nicht kleiner als zwei ist, welches Grundes wegen wir ihn mit der Form $2\cos\theta$ ausgedrückt haben. Deswegen ergibt sich daraus die Frage von größter Bedeutung, ob unsere Schlussfolgerungen immer noch gelten, wenn jener mittlere Term größer als zwei angenommen werden würde oder wenn der Winkel θ imaginär wäre, oder nicht. Aber auch in diesem Fall kann kein Zweifel bestehen, dass unsere finale Formel immer noch mit der Wahrheit verträglich sein wird. Vor allem ist hier aber zu bemerken, dass jenem mittleren Term $2\cos\theta$ ein negativer Wert zugeteilt werden sollte, weil andernfalls der Nenner selbst verschwinden würde, während unsere variable Größe x von der Grenze 0 bis hin zu $x = 1$ vermehrt wird. Deswegen wollen wir den Winkel $\theta = \pi - \eta$ setzen und unser Wert des Integrals wird

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2\cos\eta + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi \sin\frac{p\eta}{n}}{n \sin\eta \sin\frac{\pi p}{n}}$$

sein. In dieser Formel wollen wir also den Winkel η imaginär werden lassen, indem wir $\eta = \varphi\sqrt{-1}$ setzen, und durch das, was wir schon oben bemerkt haben, wird $2\cos\varphi\sqrt{-1} = e^{\varphi} + e^{\varphi}$ sein, sodass unser Nenner

$$x^n + e^{\varphi} + e^{-\varphi} + x^{-n} = \frac{1}{x^n}(x^n + e^{\varphi})(x^n + e^{-\varphi})$$

ist, welcher sich deshalb sofort in zwei reelle Faktoren der Form $x + k$ auflösen lässt; dann wird aber

$$\sin \eta = \sin \varphi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\varphi} - e^{+\varphi}}{2\sqrt{-1}}$$

werden und in gleicher Weise wird

$$\sin \frac{p}{n} \eta = \sin \frac{p}{n} \varphi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\frac{p\varphi}{n}} - e^{+\frac{p\varphi}{n}}}{2\sqrt{-1}}$$

sein, woher unsere Integralformel reell als

$$= \frac{\pi \left(e^{-\frac{p\varphi}{n}} - e^{+\frac{p\varphi}{n}} \right)}{n(e^{-\varphi} - e^{+\varphi}) \sin \frac{\pi p}{n}}$$

hervortritt. Wir wollen aber der Kürze wegen $e^{\varphi} = f$ setzen, dass $e^{-\varphi} = \frac{1}{f}$ ist, und unsere Integralformel wird die folgende Form annehmen

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + \left(f + \frac{1}{f} \right) + x^{-n}} \begin{bmatrix} \text{von} & x = 0 \\ \text{bis} & x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi \left(f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}} \right)}{n(f - f^{-1}) \sin \frac{p\pi}{n}},$$

was als der ganzen Aufmerksamkeit würdiges Theorem angesehen werden kann; hier wird per se eingesehen, dass der Wert desselben Integrals bis hin zu $x = \infty$ erstreckt doppelt so groß sein wird.

X. Wenn wir also nun in dieser Form auch dem Exponenten p einen imaginären Wert zuteilen, wird gleichermaßen in keiner Weise bezweifelt werden können, dass unsere Schlussfolgerung wahr bleiben wird. Wir wollen also $p = q\sqrt{-1}$ setzen und es wird wie zuvor $x^p + x^{-p} = 2 \cos q \log x$ sein; dann wird aber

$$\sin \frac{p\pi}{n} = \frac{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}{2\sqrt{-1}}$$

sein; für den Zähler des Integrals wird aber

$$f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}} = 2\sqrt{-1} \cdot \sin \frac{q}{n} \log f$$

sein. Nachdem diese Werte eingesetzt worden sind, erhalten wir das folgende

THEOREM

Der Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos q \log x}{x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wird immer der Formel

$$\frac{2\pi \sin \frac{q}{n} \log f}{n(f - f^{-1}) \left(e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}}\right)}$$

gleich werden.

XI. Weiter habe ich vor nicht allzu langer Zeit bemerkt, dass alle Integrale von dieser Art ziemlich gefällig mit unendlichen Reihen ausgedrückt werden können. Weil nämlich dieser Bruch

$$\frac{x^p}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}} = \frac{x^{n+p}}{x^{2n} - 2x^n \cos\theta + 1}$$

in diese Reihe aufgelöst wird

$$\frac{1}{\sin\theta}(x^{n+p}\sin\theta + x^{2n+p}\sin 2\theta + x^{3n+p}\sin 3\theta + \text{etc.}),$$

wird dieses Integral

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt dieser unendlichen Reihe gleich werden

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{n+p} + \frac{\sin 2\theta}{2n+p} + \frac{\sin 3\theta}{3n+p} + \frac{\sin 4\theta}{4n+p} + \text{etc.}\right).$$

Wenn wir also p negativ nehmen würden, dann wird unsere grundlegende Formel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}}$$

von $x = 0$ bis zu $x = 1$ erstreckt immer dieser aus zwei Teilen bestehenden unendlichen Reihe gleich werden

$$\frac{1}{\sin\theta}\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\sin\theta}{n+p} + \dfrac{2\theta}{2n+p} + \dfrac{\sin 3\theta}{3n+p} + \dfrac{\sin 4\theta}{4n+p} + \text{etc.} \\ + \dfrac{\sin\theta}{n-p} + \dfrac{2\theta}{2n-p} + \dfrac{\sin 3\theta}{3n-p} + \dfrac{\sin 4\theta}{4n-p} + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

welche, indem man je zwei homologe Terme verbindet, zu dieser Reihe zusammengefasst wird

$$\frac{2n}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{nn-pp} + \frac{2\sin 2\theta}{4nn-pp} + \frac{3\sin 3\theta}{9nn-pp} + \frac{4\sin 4\theta}{16nn-pp} + \text{etc.}\right).$$

XII. Daher entspringt nun offenkundig für den Fall, in dem $p = q\sqrt{-1}$ gesetzt wird, diese unendliche Reihe

$$\frac{2n}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{nn+qq} + \frac{2\sin 2\theta}{4nn+qq} + \frac{3\sin 3\theta}{9nn+qq} + \frac{4\sin 4\theta}{16nn+qq} + \text{etc.}\right),$$

welche also den Wert dieser Integralformel ausdrückt

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2\cos q \log x}{x^n - 2\cos\theta + x^{-n}},$$

natürlich von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt, sodass die Summe dieser Reihe auf endliche Weise ausgedrückt auch

$$\frac{\pi}{n\sin\theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi-\theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi-\theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}$$

ist. Man sieht sogar leicht ein, dass hier auch der Winkel θ als imaginär angenommen werden kann. Wir sehen nämlich, dass für $\theta = \varphi\sqrt{-1}$ gesetzt

$$\sin\theta = \frac{e^{-\varphi} - e^{+\varphi}}{2\sqrt{-1}}$$

und daher im Allgemeinen

$$\sin\lambda\theta = \frac{e^{-\lambda\varphi} - e^{+\lambda\varphi}}{2\sqrt{-1}}$$

sein wird. Daher, wenn wir $e^{\varphi} = f$ setzen, wird

$$\frac{\sin \lambda\theta}{\sin\theta} = \frac{f^{\lambda} - f^{-\lambda}}{f - \frac{1}{f}}$$

sein, woher jene Reihe eine hinreichend gefällige Form annehmen wird.

XII [a] Schließlich können die Operationen, die wir bei der Integration unserer Formel benutzt haben, nicht bestehen bleiben, wenn der Exponent n keine ganze Zahl war. Dennoch wird indes der Wert des Integrals, den wir für den Fall $x = 1$ oder $x = \infty$ gefunden haben, wahrheitskonform entdeckt, nicht nur wannimmer für n eine beliebige gebrochene Zahl genommen wird, sondern sogar wenn sie imaginär angenommen wird, wovon das erste leicht gezeigt wird. Es sei nämlich $n = \frac{m}{\lambda}$ und man setze $x = y^{\lambda}$ und wegen $\frac{\partial x}{x} = \frac{\lambda \partial y}{y}$ wird diese Integralformel mit ganzzahligen Exponenten entspringen

$$\int \frac{\lambda \partial y}{y} \cdot \frac{y^{\lambda p} + y^{-\lambda p}}{y^m - 2\cos\theta + y^{-m}},$$

deren Wert im Fall $x = 1$ also gemäß der gefundenen Formel

$$\frac{\lambda\pi}{m} \cdot \frac{\sin \frac{\lambda p}{m}(\pi - \theta)}{\sin\theta \sin \frac{\lambda p \pi}{m}}$$

sein muss, welcher, wenn anstelle von m wieder der Wert λn eingesetzt wird, natürlich in unsere oben [V] gefundene Formel

$$\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{\sin\theta \sin \frac{p\pi}{n}}$$

übergeht. Daher bleibt aber kein weiterer Zweifel, dass diese Wahrheit besteht, auch wenn n eine imaginäre Zahl war. Wir wollen also $n = m\sqrt{-1}$ setzen und die Integralformel wird auf diese Form zurückgeführt werden

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{2\cos m \log x - 2\cos\theta},$$

deren Wert also im Fall $x = 1$ gewiss

$$\frac{p}{m\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\frac{p}{m}(\pi-\theta)} - e^{-\frac{p}{m}(\pi-\theta)}}{\sin\theta \left(e^{\frac{\pi p}{m}} - e^{-\frac{\pi p}{m}}\right)}$$

sein wird, wo es wundersam erscheinen wird, dass der Wert immer imaginär ist, obgleich die Differentialform, während x von der Grenze 0 bis zur Grenze $x = 1$ vermehrt wird, reell bleibt, scheint das zurecht höchst sonderbar. Dennoch fehlt es indes nicht an Fällen, in denen der Wert des Integrals einer reellen Differentialform offensichtlich imaginär wird, was ausreichen wird, es bei dieser einfacheren Formel

$$\int \frac{\partial x}{x \cos m \log x}$$

gezeigt zu haben, welche natürlich, wenn x von 0 bis hin zu 1 vermehrt wird, durchgehend reell bleibt. Um diese Formel also zu integrieren, wollen wir $\log x = -z$ setzen, wo man bemerke, während x von 0 bis hin zu 1 fortschreitet, dass dann z von ∞ bis hin zu 0 schrumpft. Nun wird also unsere Integralformel

$$\int \frac{-\partial z}{\cos mz}$$

sein; weil aber bekannt ist, dass

$$\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \log \tan \frac{1}{2} \varphi$$

ist, wollen wir $\varphi = 90^\circ - mz$ nehmen und es wird $\partial \varphi = -m \partial z$ und daher

$$\int \frac{-m \partial z}{\cos mz} = + \log \tan \left(45^\circ - \frac{1}{2} mz \right)$$

sein, welches Integral offensichtlich für die Grenze $z = 0$ verschwindet; während aber von dieser Grenze aus die Größe z bis ins Unendliche vermehrt wird, wird der unendliche Tangens dieses Winkels negativ und sein Logarithmus daher imaginär werden wird, woher wir uns nicht weiter wundern werden, dass das Integral einer reellen Differentialform in gewissen Fällen imaginär werden kann.

XIII. Auf diese Weise ist also aufgezeigt, dass das angegebene Integral unserer vorgelegten Differentialformel

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \cos \theta + x^{-n}}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ immer wahrheitskonform ist, welche Werte auch immer den drei Buchstaben n, p und θ zugeteilt werden, ob sie ganzzahlig oder gebrochen oder gar imaginär sind. Dennoch sind indes die schon anfangs erwähnten Fälle gegeben, in denen diese Integrale von der Wahrheit abweichen, was natürlich immer passieren muss, sooft der Exponent p größer ist als der Exponent n, weswegen wir gezwungen sind, alle Fälle auszuschließen, in denen die Formel $p - n$ reell und positiv ist. Nachdem diese aber ausgeschlossen worden sind, sind die verschiedenen Formeln, zu denen wir hier gelangt sind, so beschaffen, dass sie der größten Aufmerksamkeit würdig erscheinen und zugleich nicht zu verachtende Zuwächse für die analytische Wissenschaft verheißen.